Este es un examen **individual**, no se permite el uso de libros, apuntes, calculadoras o cualquier otro medio electrónico. Recuerde apagar y guardar su teléfono celular. Toda respuesta debe estar **justificada** matemáticamente. Firme y entregue el enunciado junto a la hoja de examen. **Tiempo máximo 1 hora y 20 minutos.**

Nombre: ______________________________ Código: ______________

1. Responda *falso* o *verdadero*, justificando *matemáticamente* su respuesta.

   i. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y^2}{x^4+3y^4} = 0.$

   ii. La derivada direccional de la función $f(x,y,z) = x^2 + 2xyz$ en el punto $(1,0,1)$ en dirección del vector $\langle 1,1,1\rangle$ es igual a $\frac{4}{\sqrt{3}}$.

   iii. El campo vectorial $\vec{\mathbf{F}}(x,y,z) = \langle 2x, 2xz, 2xy\rangle$ es conservativo (i.e. $\vec{\mathbf{F}} = \vec{\nabla} f$ para algún campo escalar f).

   iv. El campo vectorial $\vec{\mathbf{F}}(x,y,z) = \langle 2x, 2xz, 2xy\rangle$ es irrotacional (i.e. $\vec{\mathbf{F}} \neq \vec{\nabla}\times\vec{\mathbf{G}}$ para algún campo vectorial $\vec{\mathbf{G}}$).

   v. El vector tangente a la curva $\mathbf{c}(t) = \langle \operatorname{sen} t, \cos t, t\rangle$ en el punto $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\pi}{4})$ es $\langle \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\pi}{4}\rangle$.

   (5 puntos)

2. Considere la función $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$.

   i. Encuentre y clasifique todos los puntos críticos de f.

   ii. Encuentre y clasifique todos los extremos absolutos de f sujeta a la restricción $x^2 + y^2 = 2$.

   (5 puntos)

3. Considere la superficies S_1 y S_2 en $\mathbb{R}^3$ dadas por las ecuaciones $z = 2 - x^2 - y^2$ y $z = -2 + x^2 + y^2$, respectivamente.

   i. Demuestre que el punto $(1,1,0)$ está en ambas superficies.

   ii. Encuentre la ecuación del plano tangente a cada superficie en el punto $(1,1,0)$.

   iii. Encuentre la recta de intersección a los planos calculados en el enunciado anterior.

   (5 puntos)

4. Considere las funciones $f(x,y) = (\operatorname{sen}(x) + xy, e^{xy})$ y $g(u,u) = (ue^v, \cos(uv))$.

   i. Escriba una fórmula para la función compuesta $f\circ g$.

   ii. Usando la regla de la cadena calcule la derivada $D(f\circ g)(0,0)$.

   (5 puntos)

Solución

1.

i. **Falso.** El límite $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^4+3y^4}$ no existe, como se puede verificar fácilmente al evaluar a lo largo de cualquiera de los ejes, e.g.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^4+3y^4} = \lim_{(x,0)\to(0,0)} \frac{0}{x^4} = 0,$$

y comparando con el resultado al evaluar por cualquier recta que pase por el origen, e.g.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^4+3y^4} = \lim_{(x,x)\to(0,0)} \frac{x^4}{4x^4} = \frac{1}{4}.$$

ii. **Verdadero.** La derivada direccional de la función $f(x,y,z) = x^2 + 2xyz$ en el punto $(1,0,1)$ en dirección del vector $\langle 1,1,1\rangle$ debe calcularse usando el gradiente de la función en el punto

$$\vec{\nabla} f(1,0,1) = \langle 2x+2yz, 2xz, 2xy\rangle|_{(1,0,1)} = \langle 2,2,0\rangle$$

y el vector unitario $\langle \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\rangle$:

$$D_{\langle \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\rangle} f(1,0,1) = \vec{\nabla} f(1,0,1)\cdot \langle \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\rangle = \frac{4}{\sqrt{3}}.$$

iii. **Falso.** El campo vectorial $\vec{\mathbf{F}}(x,y,z) = \langle 2x, 2xz, 2xy\rangle$ **no** es conservativo, porque todo campo vectorial conservativo $\vec{\mathbf{F}} = \vec{\nabla} f$ satisface $\vec{\nabla}\times\vec{\mathbf{F}} = \vec{0}$. Sin embargo, en este caso,

$$\vec{\nabla}\times\langle 2x, 2xz, 2xy\rangle = \langle 0, -2y, 2z\rangle \neq \vec{0}.$$

iv. **Verdadero.** El campo vectorial $\vec{\mathbf{F}}(x,y,z) = \langle 2x, 2xz, 2xy\rangle$ es irrotacional, porque si $\vec{\mathbf{F}} = \vec{\nabla}\times\vec{\mathbf{G}}$ para algún campo vectorial $\vec{\mathbf{G}}$, entonces $\vec{\nabla}\cdot\vec{\mathbf{F}} = 0$. Sin embargo, en este caso,

$$\vec{\nabla}\cdot\langle 2x, 2xz, 2xy\rangle = 2 \neq 0.$$

v. **Falso.** El vector tangente a la curva $\mathbf{c}(t) = \langle \operatorname{sen} t, \cos t, t\rangle$ en el punto $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\pi}{4})$ se calcula derivando la curva

$$\mathbf{c}'(t) = \langle \cos t, -\operatorname{sen} t, 1\rangle,$$

y evaluando en el valor del parámetro que corresponde al punto, en este caso $t = \frac{\pi}{4}$. Así,

$$\mathbf{c}'(\frac{\pi}{4}) = \langle \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\rangle.$$

2.

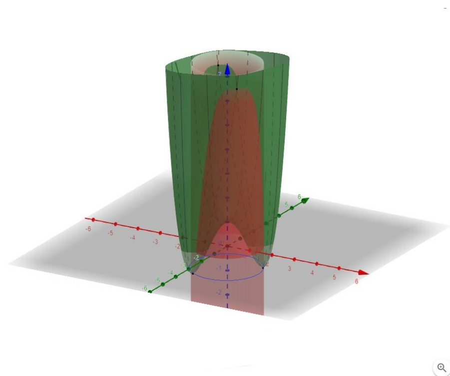
i. Considere la función $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$. Los puntos críticos de f se encuentran solucionando para x y y la ecuación $\vec{\nabla} f = \langle 4x^3 - 4y, 4y^3 - 4x\rangle = \vec{0}$. En este caso tenemos que $x^3 = y$ y $y^3 = x$, luego $x^3 = y^9 = y$, o

$$y(y^8 - 1) = 0.$$

Así, las opciones para y en esta ecuación son $y = 0, 1, -1$ y tenemos tres puntos críticos: $(0, 0)$, $(1, 1)$ y $(-1, -1)$. Para clasificarlos consideramos la matriz de segundas derivadas

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12x^2 & -4 \\ -4 & 12y^2 \end{pmatrix}$$

y observamos que su determinante es $144x^2y^2 - 16$. Tal determinante es negativo en el punto $(0, 0)$, luego este es un **punto de silla**. En $(1, 1)$ y $(-1, -1)$ el determinante es igual a $128 > 0$, así que estos puntos son extremos locales. De hecho, dado que $12x^2 = 12 > 0$ en ambos puntos, $(1, 1)$ y $(-1, -1)$ son **mínimos locales** (ver figura).



ii. Considere ahora la función $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$ sujeta a la restricción $x^2 + y^2 = 2$. Queremos encontrar todos los extremos absolutos de f sujeta a esta restricción, es decir los máximos y mínimos de f sobre el cilindro $x^2 + y^2 = 2$ (ver figura). Es claro que dos de los extremos locales encontrados anteriormente están sobre el círculo $x^2 + y^2 = 2$ en el plano x-y (los mínimos locales $(1, 1)$ y $(-1, -1)$), debemos encontrar los demás.

Usando el método de **multiplicadores de Lagrange** tenemos que, en los puntos extremos que satisfacen la restricción

$$\vec{\nabla} f = \lambda \vec{\nabla} g,$$

donde $g(x, y) = x^2 + y^2 = 2$ es la restricción. Así, $\vec{\nabla} f = \langle 4x^3 - 4y, 4y^3 - 4x \rangle = \lambda \langle 2x, 2y \rangle = \lambda \vec{\nabla} g$, de donde podemos escribir

$$\lambda = \frac{4x^3 - 4y}{2x} = \frac{4y^3 - 4x}{2y}$$

ya que, según la restricción, x y y no pueden ser cero al mismo tiempo. De esta ecuación tenemos que $2y(4x^3 - 4y) = 2x(4y^3 - 4x)$, es decir que $x^3y - y^2 = xy^3 - x^2$, o $x^3y - xy^3 = y^2 - x^2$, así que

$$xy(x^2 - y^2) + (x^2 - y^2) = (xy + 1)(x^2 - y^2) = 0.$$

La opción $x^2 = y^2$ junto a la restricción nos da como resultado $x^2 = 1$, así que $x = \pm 1 = y$. La opción $xy = -1$ junto a la restricción nos da como resultado $x = \pm 1$ y $y = \mp 1$. Así, tenemos que los puntos extremos que satisfacen la restricción son : $(1, 1)$, $(1, -1)$, $(-1, 1)$ y $(-1, -1)$. Evaluando en la función vemos que

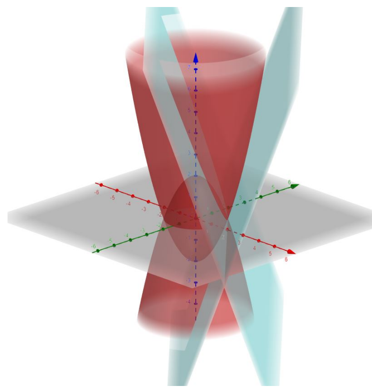
$$f(1, 1) = f(-1, -1) = -1 \quad \text{y} \quad f(1, -1) = f(-1, 1) = 7,$$

así que $(1, 1)$ y $(-1, -1)$ son los mínimos absolutos y $(1, -1)$ y $(-1, 1)$ son los máximos absolutos de la función f, respectivamente (ver figura).

3. Las superficies S_1 y S_2 en $\mathbb{R}^3$ dadas por las ecuaciones $z = 2 - x^2 - y^2$ y $z = -2 + x^2 + y^2$, respectivamente, son paraboloides (ver figura).

i. El punto $(1, 1, 0)$ está en ambas superficies porque sus coordenadas satisfacen las ecuaciones correspondientes: $2 - 1 - 1 = 0$ y $-2 + 1 + 1 = 0$.

ii. La ecuación del plano tangente a cada superficie en el punto $(1, 1, 0)$ se encuentra usando el gradiente de la función ($F_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z = 2$ y $F_2(x, y, z) = x^2 + y^2 - z = 2$, respectivamente) para la cual cada superficie es una superficie de nivel.



En este caso
$$\vec{\nabla}F_1(1, 1, 0) = \langle 2, 2, 1\rangle \quad \text{y} \quad \vec{\nabla}F_2(1, 1, 0) = \langle 2, 2, -1\rangle,$$
así que las ecuaciones correspondientes son $\langle 2, 2, 1\rangle \cdot \langle x - 1, y - 1, z - 0\rangle = 0$ y $\langle 2, 2, -1\rangle \cdot \langle x - 1, y - 1, z - 0\rangle = 0$, es decir
$$2x + 2y + z = 4 \quad \text{y} \quad 2x + 2y - z = 4.$$

iii. Los planos calculados en el enunciado anterior se intersectan en una recta que pasa por el punto $(1, 1, 0)$ (punto común a ambos planos y a ambas superficies) y cuyo vector director se puede encontrar calculando el producto cruz de los normales al plano en ese punto ($\vec{\nabla}F_1 \times \vec{\nabla}F_2$ en $(1, 1, 0)$) o parametrizando la curva de intersección ($x^2 + y^2 = 2$). Siguiendo el primero de los métodos, tenemos que
$$\vec{\nabla}F_1 \times \vec{\nabla}F_2|_{(1,1,0)} = \langle -4, 4, 0\rangle,$$
luego la ecuación vectorial de la recta de intersección de ambos planos es
$$\langle x, y, z\rangle = \langle 1, 1, 0\rangle + t\langle -4, 4, 0\rangle,$$
para $t \in \mathbb{R}$ (ver figura).

4. Considere las funciones $f(x, y) = (\text{sen}(x) + xy, e^{xy})$ y $g(u, u) = (ue^v, \cos(uv))$.

i. La función compuesta $f \circ g$ es, por definición,
$$f \circ g(u, v) = f(g(u, v)) = (\text{sen}(ue^v) + (ue^v)\cos(uv), e^{ue^v \cos(uv)}).$$

ii. Usando la regla de la cadena podemos calcular la derivada $D(f \circ g)(0, 0)$ como
$$D(f \circ g)(0, 0) = Df(g(0, 0))Dg(0, 0).$$

Primero, $g(0,0) = (0,1)$, así que

$$Df(g(0,0)) = Df(0,1) = \begin{pmatrix} \frac{\partial(\mathrm{sen}(x)+xy)}{\partial x} & \frac{\partial(\mathrm{sen}(x)+xy)}{\partial y} \\ \frac{\partial e^{xy}}{\partial x} & \frac{\partial e^{xy}}{\partial y} \end{pmatrix}\Bigg|_{(0,1)} = \begin{pmatrix} \cos(x)+y & x \\ ye^{xy} & xe^{xy} \end{pmatrix}\Bigg|_{(0,1)} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por otra parte,

$$Dg(0,0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial(ue^v)}{\partial u} & \frac{\partial(ue^v)}{\partial v} \\ \frac{\partial\cos(uv)}{\partial u} & \frac{\partial\cos(uv)}{\partial v} \end{pmatrix}\Bigg|_{(0,0)} = \begin{pmatrix} e^v & ue^v \\ -v\mathrm{sen}(uv) & -u\mathrm{sen}(uv) \end{pmatrix}\Bigg|_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Finalmente,

$$D(f\circ g)(0,0) = Df(g(0,0))Dg(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$